线性代数　中国科学技术大学 2023 春
转置、共轭、迹、分块矩阵

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

矩阵乘法运算的基本性质

定理

矩阵乘法运算的基本性质:

1. 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$;
2. 乘法单位元: $IA = AI = A$;
3. 左分配律: $(A+B)C = AC + BC$;
4. 右分配律: $A(B+C) = AB + AC$;
5. 数乘结合律: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda)B$.

其中 A, B, C 是使得运算有意义的矩阵, λ 为常数.

证明思路: 计算并比较两边矩阵的相同位置的元素.

利用矩阵乘法简化表达式

- 设 A 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$ 为 $\mathbb{F}$ 系数的多项式, 定义矩阵多项式

$$f(A):=c_0I_n+c_1A+\cdots+c_kA^k.$$

- 映射 $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 保持加法和乘法.
- 一般线性方程组可简写为

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

- 若线性变换 $\mathscr{A}$ 与矩阵 A 对应，则对于任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{F}^{\mathbf{n}}$,

$$\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{Ax}.$$

- 坐标变换与矩阵乘法

$$X'=AX+X_0'$$

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 如果存在 n 阶方阵 X 满足

$$XA = I = AX$$

则称 A 可逆, 并称 X 为 A 的逆矩阵. 记做 A^{-1}.

性质 (存在则唯一)

若 X 和 Y 都为 A 的逆矩阵, 则 $X = Y$.

性质

设 A 和 B 为同阶可逆方阵, λ 为非零常数. 则

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$;
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$(穿脱原理).

例

1. 证明若 $f(A)=0$ 且 $f(a)\neq 0$, 则 $A-aI$ 可逆.
2. 证明 $I+J_n$ 可逆.
3. 已知 $2A^2-3A+4I=0$, 求 A 和 $A-I$ 的逆.
4. 已知 $3A^3-2A^2+5A+I=0$, 求 A 和 $A+I$ 的逆.

例

证明若 A, B 和 $A+B$ 均可逆, 则 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆.

问题： 如何求一般可逆矩阵的逆？

定义

1. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵. 我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置矩阵, 记为 A^T;

2. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵. 我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

为 A 的共轭矩阵, 记为 $\overline{A}$;

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的方阵. 我们称对角线元素之和为矩阵 A 的迹, 记为

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11}+\cdots+a_{nn}.$$

例

已知 $A=\begin{pmatrix}1+i & 2-i\\ 3-i & 4+i\end{pmatrix}$. 求 $A^T,\overline{A}$ 和 $\mathrm{tr}(A)$.

转置, 共轭与迹的基本性质

引理 (转置和共轭的基本性质)

- $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$;
- $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A}$;
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$.

引理 (迹的基本性质)

- $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;
- $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$;
- $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$, $\quad \operatorname{tr}(\overline{A}) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

例

设 A 为复矩阵. 证明若 $\operatorname{tr}(A\overline{A}^T) = 0$, 则 $A = 0$.

定义

对于一个矩阵 A，我们将它的行和列分为几个部分后得到的由小矩阵 A_{ij} 组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}=(A_{ij})_{r\times s}$$

称为分块矩阵, 其中每个 A_{ij} 称为子块.

例

我们将矩阵的第 i 行记为 β_i 第 j 列记为 α_i, 则

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

分块矩阵例子

$$A=\begin{pmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&10\\\hline 2&5&8&11\\3&6&9&12\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

- 行的分隔方式为 $3=1+2$，
- 列的分隔方式为 $4=3+1$。

$$A=\begin{pmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4\end{pmatrix}$$

- 行的分隔方式为 $3=3$，
- 列的分隔方式为 $4=1+1+1+1$。

几类特殊分块矩阵

准对角矩阵, 准上三角矩阵, 准下三角矩阵.

$$\begin{pmatrix} * & * & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & * & * \end{pmatrix}$$

注: 依赖于分块方式.

引理 (分块矩阵基本性质)

- $(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$;
- $\lambda(A_{ij})_{r\times s}=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$;
- $((A_{ij})_{r\times s})^T=(B_{ij})_{s\times r}$, 其中 $B_{ij}=A_{ji}^T$;
- $\overline{(A_{ij})_{r\times s}}=(\overline{A_{ij}})_{r\times s}$;
- 若 $A=(A_{ij})_{r\times r}$ 为方阵且行列拆分方式相同, 则

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{tr}(A_{ii});$$

- 若 $A_1,\cdots,A_r$ 均可逆, 则 $\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r)$ 也可逆, 且逆矩阵为

$$\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r)^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_r^{-1}).$$

两个分块矩阵可以分块相乘的要求是：

1. 第一个矩阵的列的数目等于第二个矩阵的行的数目；
2. 第一个矩阵的列的分隔方式等于第二个矩阵的行的分隔方式.

分块相乘的方法与矩阵的乘法法则一致.

定理

若 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 的列拆分方式与 $B=(B_{jk})_{s\times t}$ 的行拆分方式相同，则

$$AB=\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}\right)_{r\times t}.$$

证明：任取不大于 A 行数的正整数 p 和不大于 B 列数的正整数 q. 不妨设 A 的 $(p,1)$ 元素处在 A_{i1} 的第 $(u,1)$ 位置，B 的 $(1,q)$ 元素处在第 B_{1k} 的第 $(1,w)$ 位置. 我们需要验证：$(AB)_{(pq)}=\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}\right)_{(uw)}$. 设 A 的列数拆分方式为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$. 则

$$\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}\right)_{(uw)}=\sum_{j=1}^{s}\left(A_{ij}B_{jk}\right)_{(uw)}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n_j}\left(A_{ij}\right)_{(uv)}\left(B_{jk}\right)_{(vw)}=(AB)_{(pq)}.$$

例

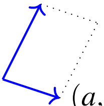
选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB，其中

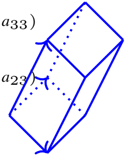
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^k.

解: 归纳 $\Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix}, B^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.





- 给定两个二维数组向量 (a,b) 和 (c,d). 如图我们有平行四边形. 这时平行四边形的 (有向) 面积为 $S=ad-bc$.
- 给定三个三维数组向量 (a_{11},a_{12},a_{13}),(a_{11},a_{12},a_{13}) 和 (a_{11},a_{12},a_{13}). 如图我们可构造一个平行六面体. 其 (有向) 体积正好为

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

- 若给定 n 个 n 维数组向量呢?